ЛЕКЦИЯ № 22

Канонические преобразования.I

…когда вам приходится иметь дело с некоторым объектом, наделенным структурой, попытайтесь определить преобразования, оставляющие без изменения все структурные соотношения

Г.Вейль

Прежде чем переходить к каноническим преобразованиям, рассмотрим преобразование уравнений Лагранжа при преобразовании координат. С этим вопросом мы сталкивались при изучении нормальных мод в колебательных системах с несколькими степенями свободы в лекции №15. Проанализируем этот вопрос в общем случае.

Рассмотрим лагранжеву систему с s степенями свободы, т.е. систему, s координат которой удовлетворяют уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0\ . \tag{22.1}$$

Перейдем от этих «старых» s координат q_i к «новым» s координатам Q_i, которые связаны со старыми соотношениями

$$q_i=F(Q_1,Q_2,...,Q_s), \qquad s=1,2,...,s\,. \tag{22.2}$$

(Такое преобразование называется *точечным преобразованием)*. Кроме связей $q_i=F_i(Q)$ имеем $\dot{q}_i=(\partial F_i/\partial Q_k)\dot{Q}_k$. При этом переход к новому Лагранжиану описывается соотношением

$$L(q_i,\dot{q}_i)=L\big(F\ (Q_i);(\partial F_i/\partial Q_k)\dot{Q}_k\big)=\overline{L}\big(Q_i,\dot{Q}_i\big). \tag{22.3}$$

Какому уравнению удовлетворяет новая функция $\overline{L}\big(Q,\dot{Q}\big)$? Найдем производные от $\overline{L}$ по Q и $\dot{Q}$. Из (22.3) следует

$$\frac{\partial \overline{L}}{\partial Q_i}=\frac{\partial L}{\partial q_k}\frac{\partial F_k}{\partial Q_i}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial^2 F_k}{\partial Q_n\partial Q_i}\dot{Q}_n\,, \tag{22.4}$$

$$\frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{Q}_i}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial F_k}{\partial Q_i}\,. \tag{22.5}$$

Дифференцируя соотношение (22.5) по времени, получаем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\frac{\partial F_k}{\partial Q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial^2 F_k}{\partial Q_n \partial Q_i}\dot{Q}_n, \tag{22.6}$$

и подставляя в последнее слагаемое в (22.6) его выражение из (22.4), окончательно

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \overline{L}}{\partial Q_i} = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k}\right)\frac{\partial F_k}{\partial Q_i}. \tag{22.7}$$

Поскольку уравнение Лагранжа в правой части удовлетворяется в старых координатах, то оно выполняется и в новых координатах (левая часть равенства). Поскольку лагранжева система является одновременно и гамильононовой, то можно сказать, что при точечном преобразовании гамильтонова (каноническая) система остается гамильтоновой (канонической). Поэтому преобразования переменных, которые сохраняют гамильтоновость системы, называется ***каноническими преобразованиями***. Мы показали, что точечные преобразования (преобразования координат) являются каноническими.

Важность преобразования координат заключается в том, что в новых координатах можно надеяться упростить уравнения движения и облегчить их решение. В гамильтоновом подходе возникает удвоенное количество независимых переменных: координат и импульсов. Поэтому возникает возможность манипулирования гораздо большим числом переменных в надежде упростить задачу. Возможность расширения множества преобразований является одним из преимуществ гамильтонова подхода в механике.

Рассмотрим более общие, чем точечные, преобразования не только обобщенных координат, но и обобщенных импульсов:

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \qquad P_i = P_i(q, p, t). \tag{22.8}$$

Будут ли такие преобразования в общем случае каноническими, т.е. приводить к уравнениям Гамильтона в новых переменных? Ответ отрицательный: в общем случае – нет. Подразумевается, что мы обратим связи (22.8), выразим их в виде $q_i = q_i(Q, P, t)$ и $p_i = p_i(Q, P, t)$, подставим эти величины в «старый» гамильтониан $H(q, p) = H(q(Q, P), p(Q, P)))$ и проверим, выполняются ли уравнения Гамильтона вида $\dot{Q} = \partial H / \partial P$ и $\dot{P} = -\partial H / \partial Q$. В общем случае замены переменных они не будут удовлетворяться. Можно поставить вопрос иначе. Можно ли при произвольной замене (22.8) найти «новый» гамильтониан $H'(Q,P)$, для которого бы выполнялись уравнения Гамильтона

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P}, \qquad \dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q}. \tag{22.9}$$

В общем случае ответ опять отрицательный: если старые координаты и импульсы удовлетворяли уравнению Гамильтона, то при произвольном их преобразовании не существует никакой новой функции Гамильтона, которая бы удовлетворяла новым каноническим уравнениям.

Поэтому вопрос можно поставить иначе.

1) Как «строить» такие преобразования координат и импульсов, при переходе к которым новая система заведомо будет гамильтоновой? (Но при этом мы можем получить более сложные для решения или физически неинтересные

системы уравнений).

2) Как можно проверить, является ли предложенная нами замена переменных канонической, и стоит ли пытаться искать новый гамильтониан для новых переменных?

Рассмотрим первую задачу. Как было показано в лекции №19 (см.(19.17)), уравнения Гамильтона могут быть получены при варьировании действия $\delta S = 0$, а в лекции №21 было показано, что действие в гамильтоновом подходе может быть представлено в виде $S = \int \left(\sum p_i dq_i - H dt \right)$. Поэтому гамильтоновость исходной системы следует из равенства

$$\delta \int \left(\sum p_i dq_i - H(p,q) dt \right) = 0. \tag{22.10}$$

Если после преобразования координат и импульсов (22.8) новые переменные (P,Q) удовлетворяют уравнениям Гамильтона (22.9) с новым гамильтонианом H', то из (22.10) должно следовать выполнение равенства

$$\delta \int \left(\sum P_i dQ_i - H(P,Q) dt \right) = 0. \tag{22.11}$$

Два принципа (22.10) и (22.11) эквивалентны только, если выражения под интегралами в них отличаются на полный дифференциал от произвольной функции dF. При этом величина $\int_{t_1}^{t_2} dF = F(t_2) - F(t_1)$ есть число, которое не дает вклада при варьировании. Итак:

$$\sum p_i dq_i - H(p,q)dt - \sum P_i dQ_i + H'(P,Q)dt = dF . \qquad (22.12)$$

Поскольку в левой части стоят дифференциалы dq_i, dQ_i и dt, то функция F зависит от следующих переменных: $F = F(q_i, Q_i, t)$. Эта функция называется *производящей функцией* данного перехода от одной гамильтоновой системы к новой гамильтоновой системе, то есть она осуществляет каноническое преобразование. Выбирая различные функции $F(q,Q.t)$, мы будем получать различные новые канонические системы (т.е. новые представления исходной системы). Если новая система окажется проще исходной, то после решения задачи в ней можно вернуться к исходным переменным в решении. Но для этого надо знать связь новых и старых переменных, которая следует из вида производящей функции. Перепишем (22.12) в виде

$$dF = \sum p_i dq_i - \sum P_i dQ_i + (H' - H)dt . \qquad (22.13)$$

Отсюда видно, что

$$p_i = \frac{\partial F(q,Q,t)}{\partial q_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial F(q,Q,t)}{\partial Q_i}, \qquad H'(P,Q,t) = H(p,q,t) + \frac{\partial F(q,Q,t)}{\partial t}. \quad (22.14)$$

Первые $2s$ – это алгебраические уравнения, связывающие старые и новые переменные. Из первых s уравнений мы находим выражения для новых координат $Q_i = Q_i(p,q,t)$. После подстановки их во вторые s уравнений находим $P_i = P_i(p,q,t)$. Эти связи можно обратить и найти $p_i = p_i(P,Q,t)$ и $q_i = q_i(P,Q.t)$. После их подстановки в правую часть последнего выражения мы получаем новый гамильтониан $H'(P,Q,t)$.

В качестве простейшего примера такой производящей функции выберем $F(q,Q) = qQ$. При этом из (22.14) получаем связь $p = Q$ и $q = -P$. Т.е. координаты и импульсы обмениваются местами, что подчеркивает условный характер разделения переменных в подходе Гамильтона: можно говорить просто о двух наборах переменных, связанных уравнениями Гамильтона, которые называют *канонически сопряженными переменными.* Рассмотренное каноническое преобразование изображено на Рис.22.1. Из него видно, что это каноническое преобразование сводится к повороту осей в фазовом пространстве на угол $\pi/2$. Поскольку это просто поворот осей, то площадь выбранного участка фазовой площади $d\Gamma$ при этом преобразовании не изменяется. Рассмотрим еще одно преобразование с $F = \alpha qQ$. При этом $p = \alpha Q$ и $q = -P/\alpha$. Это – поворот осей с изменением масштаба: переменная

p «сжимается» в меру α, а переменная q в такой же мере «растягивается». При этом фазовый объем также сохраняется.

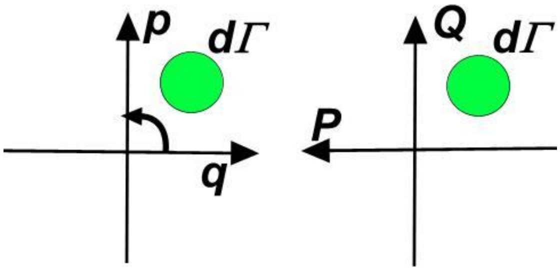

Рис.22.1

Производящая функция $F(q,Q,t)$ – не единственная, порождающая канонические преобразования. В качестве производящей функции можно выбрать функцию старых координат q_i и новых импульсов P_i. Произведем преобразование Лежандра над соотношением (22.13):

$$dF = \sum p_i dq_i - \sum P_i dQ_i + (H' - H)dt = \sum p_i dq_i - \sum d(P_i Q_i) + \sum Q_i dP_i + (H' - H)dt \quad (22.15)$$

или

$$d\left(F + \sum P_i Q_i\right) = \sum p_i dq_i + \sum Q_i dP_i + (H' - H)dt = d\Phi(q_i, P_i, t). \quad (22.16)$$

С помощью этой производящей функции связь старых и новых переменных определяется набором уравнений:

$$p_i = \frac{\partial \Phi(q,P,t)}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial \Phi(q,P,t)}{\partial P_i}, \qquad H'(P,Q,t) = H(p,q,t) + \frac{\partial \Phi(q,P,t)}{\partial t}. \quad (22.17)$$

Кроме этих двух производящих функций $F(q,Q,t)$ и $\Phi(q,P,t)$ с помощью соответствующих преобразований Лежандра можно построить также производящие функции $W_1(p,Q,t)$, $W_2(p,P,t)$ и $W(p,q,t)$. Обсудим последнюю из них. Запишем (22.13) в виде

$$dW(p_i, q_i, t) = \sum p_i dq_i - \sum P_i dQ_i + (H' - H)dt. \quad (22.18)$$

Учитывая, что $Q_i = Q_i(q, p, t)$, перепишем (22.18) в виде

$$\begin{aligned} &\sum \frac{\partial W}{\partial q_i} dq_i + \sum \frac{\partial W}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial W}{\partial t} dt = \\ &= \sum p_i dq_i - \sum P_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_s} dq_s - \sum P_i \frac{\partial Q_i}{\partial p_s} dp_s - \sum P_i \frac{\partial Q_i}{\partial t} dt + (H' - H)dt \end{aligned}. \quad (22.19)$$

Приравнивая нулю коэффициенты при всех дифференциалах, получаем

$$\sum P_n \frac{\partial Q_n}{\partial q_i} + \frac{\partial W}{\partial q_i} - p_i = 0, \tag{22.20}$$

$$\sum P_n \frac{\partial Q_n}{\partial p_i} + \frac{\partial W}{\partial p_i} = 0, \tag{22.21}$$

$$\sum P_n \frac{\partial Q_n}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial t} + H - H' = 0. \tag{22.22}$$

Это преобразование сложней предыдущих, поскольку вместо алгебраических уравнений (22.14), (22.17) для определения связи новых и старых переменных в данном случае эти связи определяются дифференциальными уравнениями (22.20), (22.21). Но из этого преобразования можно получить интересные следствия. Продифференцировав (22.20) по p_k, а (22.21) по q_k и, вычев полученное друг из друга, мы приходим к соотношению:

$$\frac{\partial P_n}{\partial p_k}\frac{\partial Q_n}{\partial qi} - \frac{\partial P_n}{\partial q_i}\frac{\partial Q_n}{\partial p_k} = \delta_{ik}. \tag{22.23}$$

Здесь мы имеем еще одну билинейную антисимметричную дифференциальную операцию

$$[fg]_{pq} = \sum\left(\frac{\partial p_i}{\partial f}\frac{\partial q_i}{\partial g} - \frac{\partial p_i}{\partial g}\frac{\partial q_i}{\partial f}\right). \tag{22.24}$$

Эта конструкция называется ***скобками Лагранжа.*** Сравнение с (20.4) показывает, что скобки Лагранжа в некотором смысле «обратные» по отношению к скобкам Пуассона.

Вернемся ко второму вопросу: как можно проверить каноничность преобразования выбранной замены переменных? Для этого надо предварительно доказать **теорему об инвариантности скобок Пуассона** относительно канонических преобразований:

Если преобразование переменных $(p,q)\to(P,Q)$ является каноническим, и произвести такую замену переменных в двух функциях $f(p,q), g(p,q)\to f(P,Q), g(P,Q)$, то скобки Пуассона в новых и старых переменных будут совпадать:

$$\sum\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right) = \sum\left(\frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial g}{\partial Q_i} - \frac{\partial f}{\partial Q_i}\frac{\partial g}{\partial P_i}\right), \quad \{fg\}_{pq} = \{fg\}_{PQ}. \tag{22.25}$$

Эта теорема легко доказывается для системы с одной степенью свободы. Для нее

$$\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}=\left(\frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p}+\frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q}+\frac{\partial g}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q}\right)-\left(\frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q}+\frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p}+\frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial g}{\partial Q}-\frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial g}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q}-\frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p}\right)$$

Но из (22.23) следует, что второй множитель в правой части равен единице.

В общем случае инвариантность скобок Пуассона относительно канонических преобразований можно следующим образом. Прежде всего, в связях (22.14) $(p,q)\to(P,Q)$ время играет роль параметров, который не затрагивается в операциях дифференцирования по новым и старым переменным. Поэтому теорему достаточно доказать для систем, не зависящих от времени. В этом случае в скобке Пуассона $\{gf\}_{p,q}$ функцию $g(p,q)$ можно формально рассматривать в качестве гамильтониана некой системы. Но для гамильтоновой системы выполняется соотношение $df/dt=\{Hf\}$, т.е. в данном случае $df/dt=\{gf\}$. Но df/dt есть полное изменение функции $f(t)$ за время dt, т.е. «число», которое не может зависеть от выбора тех или иных переменных. Прямое доказательство теоремы об инвариантности скобок Пуассона мы рассмотрим в дополнительной лекции №23.

Выбирая в (22.25) в качестве f и g величины P_i и Q_i и пользуясь свойствами *фундаментальных скобок Пуассона* (20.17)

$$\{P_i,P_k\}_{PQ}=0,\qquad \{Q_i,Q_k\}_{PQ}=0,\qquad \{P_i,Q_k\}_{PQ}=\delta_{ik}, \tag{22.26}$$

получим

$$\{P_i,P_k\}_{pq}=0,\qquad \{Q_i,Q_k\}_{pq}=0,\qquad \{P_i,Q_k\}_{pq}=\delta_{ik}. \tag{22.27}$$

Поэтому, выбирая некоторую замену старых координат и импульсов новыми, надо проверить простым дифференцированием новых переменных по старым выполнение или не выполнение соотношений (22.27), т.е. инвариантность скобок Пуассона. Если какие-то из этих соотношений не выполняются, то предложенная замена переменных не является канонической.